



TITLE:

# 高ランクな半単純リー群における Kunze-Stein現象の端点評価について (関数空間の深化とその周辺)

AUTHOR(S):

河添, 健

---

CITATION:

河添, 健. 高ランクな半単純リー群におけるKunze-Stein現象の端点評価について (関数空間の深化とその周辺). 数理解析研究所講究録 2018, 2095: 79-87

ISSUE DATE:

2018-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251708>

RIGHT:

# 高ランクな半単純リー群における Kunze-Stein 現象の端点評価について

慶応大学 河添 健

Takeshi Kawazoe

Keio University

## 1 背景

実ランク 1 の非コンパクト半単純リー群上の Kunze-Stein 現象の端点評価

$$\|f * g\|_{L^{2,\infty}(G)} \leq c \|f\|_{L^{2,1}(G)} \|g\|_{L^{2,1}(G)} \quad (1)$$

は A. Ionescu ([4]) によって得られた。ここで  $f, g$  は Lorentz 空間  $L^{p,q}(G)$  に属し、 $\|\cdot\|_{L^{p,q}(G)}$  はそのノルムである。この評価は J. Liu によりヤコビ hyper 群上でも成立することが示され ([7])、さらに河添により Abel 変換を用いた別証明が得られた ([5])。本稿ではその手法を用いて、高ランクな場合の端点評価について考える。とくに複素単純リー群の場合に次のような修正した形の不等式を紹介する。

$$\|f * M_m g\|_{L^{2,\infty}(\Delta)} \leq c \|f\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|g\|_{L^{2,1}(\Delta)}. \quad (2)$$

ここで  $L^{p,q}(\Delta)$  は  $L^{p,q}(G)$  の  $K$  両側関数全体からなる部分空間であり、 $M_m$  は  $A$  のリー環の双対空間  $\mathfrak{a}^*$  上の関数  $m$  に対応するフーリエ multiplier である。 $m$  が良い性質 (3.1) を満たすとき、この不等式が成立し対応するフーリエ multiplier を  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$  型と呼ぶこととする。以下では  $M_m$  が  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$  型となる十分条件を導き、その例を  $G = Sp(4, \mathbb{C})$  と  $SL(3, \mathbb{C})$  の場合に具体的に与える。これらの成果は J. Liu 氏との共同研究 ([6]) である。また修正端点評価は  $SU(n, m)$  でも例が得られている。

## 2 準備

$G$  を複素半単純リー群とし、 $G = KAN$  および  $G = KAK$  をそれぞれ、 $G$  の岩沢分解およびカルタン分解とする。部分群  $K, A, N$  はそれぞれ  $G$  の極大コンパクト、ベクトル、べき例部分群である。 $G$  のリー環を  $\mathfrak{g}$ 、 $A$  のリー環を  $\mathfrak{a}$  とする。 $A = \exp \mathfrak{a}$  である。 $\mathfrak{a}^*$  を  $\mathfrak{a}$  の双対空間とし、 $\Sigma_+$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  の正ルートの全体とする。 $\rho(H) = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \alpha(H)$  とする。 $W$  を  $(G, A)$  のワイル群とし、 $\mathfrak{a}_+$  を  $\mathfrak{a}$  の正ワイル chamber とし、 $A_+ = \exp \mathfrak{a}_+$  とする。 $dg, da, dk, dn, dH$  をそれぞれ、 $G, A, K, N, \mathfrak{a}$  上の不変測度とし、[9], §1 のように正規化する。このとき  $d(\exp H) = dH$  および  $dg = e^{2\rho(\log a)} dk da dn$  となる。 $A$  上の関数  $D$  を

$$D(\exp H) = \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{w\rho(H)} = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} (e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)})$$

と定義し、 $\Delta = D^2$  する。このとき  $\Delta(\exp H) = O(e^{2\rho(H)})$  である。また  $\mathfrak{a}^*$  上の関数  $\pi$  を

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \lambda(H_\alpha)$$

と定義する。ここで  $H_\alpha$  は  $\alpha$  のルート空間に属する要素で  $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$  を満たすものである。このとき  $G$  上の  $K$  両側不変関数  $f$  に対して

$$\int_G f(g) dg = C_0 \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) \Delta(\exp H) dH$$

となる。 $A$  上の正值関数  $w$  に対して  $L^p(w)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  を  $G$  上の  $K$  両側不変関数  $f$  で

$$\int_{\mathfrak{a}} |f(\exp H)|^p w(\exp H) dH < \infty$$

を満たすもの全体とする。同様に  $L^{p,q}(w)$  を  $G$  上の  $K$  両側不変関数  $f$  で、 $f \circ \exp$  が  $w \circ \exp$  を重みとする  $\mathfrak{a}$  上のローレンツ空間  $L^{p,q}(w \circ \exp)$  (cf. [3]) に属するもの全体とする。

ここで  $G$  上の球変換および Abel 変換を復習する。詳しくは [2], §14, [8], §4 and [9] を参照されたい。 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  に対して  $G$  上の球関数  $\phi_\lambda$  は

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \frac{\pi(\rho)}{\pi(i\lambda)} \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{iw\lambda(H)} \quad (3)$$

と定義される。 $G$  上の  $K$  両側不変関数  $f$  に対して球変換  $\widehat{f}$  および Abel 変換  $\mathcal{A}f$  は以下のように定義される。 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  に対して

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_G f(x) \phi_\lambda(g^{-1}) dg, \\ \mathcal{A}f(\exp H) &= e^{\rho(H)} \int_N f(\exp H \cdot n) dn.\end{aligned}$$

このとき

$$\widehat{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f \circ \exp)^\sim(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} \mathcal{A}f(\exp H) e^{-i\lambda(H)} dH \quad (4)$$

となる。ここでは  $\sim$  は  $\mathfrak{a}$  上のフーリエ変換を表す。このことから

$$\mathcal{A}(f * g) = \mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g \quad (5)$$

である。ただし  $*$  は  $G$  上の結合積であり  $\otimes$  は  $A$  上の結合積である。

$\pi(\partial_H)$  を次の式で定義される  $\mathfrak{a}$  上の定数係数の微分作用素とする。

$$\pi(\partial_H)\phi(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \langle \alpha, \phi'(H) \rangle.$$

すると  $\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = C_0\pi(\rho)|W|(D \cdot f \circ \exp)^\sim(\lambda)$  ([9], (25)) となる。 $\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = (\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp)^\sim$  に注意すれば、Abel 変換の反転公式

$$f(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f(\exp H) \quad (6)$$

が得られる。 $C^{-1} = C_0\pi(\rho)|W|$  である (cf. [9], Theorem 6)。とくに (5) に注意すれば

$$f * g(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g(\exp H) \quad (7)$$

となる。

### 3 修正端点評価

修正端点評価 (2) を得るためのフーリエ multiplier を導入する。 $\mathfrak{a}$  上の有界  $W$  不変関数  $m$  に対して対応するフーリエ multiplier  $M_m$  を、 $f \in L^2(\Delta)$  に対して  $\widehat{M_m f}(\lambda) = m(\lambda)\widehat{f}(\lambda)$  と定義する。同様に  $M_m$  は  $L^2(\mathfrak{a})$  上の通常のフーリエ multiplier でもあることに注意する。ここで

**Definition 3.1.**  $M_m$  is of type  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$  if  $M_m$  satisfies

$$\|M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \quad (8)$$

for all  $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$ .

と定義する。次の2つの補題は修正端点評価 (2) の証明に有効である。

**Lemma 3.2.** Let  $f$  be a smooth  $K$ -bi-invariant function on  $G$  and  $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$ . Then there exists a positive constant  $c$  such that

$$\|\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}. \quad (9)$$

*Proof.*  $\sqrt{\Delta} = D$  より、(6) から明らかである。  $\square$

**Lemma 3.3.** Let  $E(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = e^{\rho(H)}$ . For all functions  $f \in L^1(E)$ ,

$$\|f\|_{L^1(E)} \leq c\|f\|_{L^{2,1}(E^2)}.$$

*Proof.* 正単純ルートの全体を  $\Sigma_+^0 = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n = \dim \mathfrak{a}\}$  とすれば  $\mathfrak{a}$  と  $\mathbf{R}^n$  は  $H \in \mathfrak{a}$  に  $(\alpha_i(H))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$  を対応させることにより同一視できる。よって  $\mathfrak{a}_+$  に対応する領域を  $\mathbf{R}_{++}^n$  とし、 $\delta = E \circ \exp$  とすれば  $\mathbf{R}_{++}^n$  上の関数  $F$  に対して  $\|F\|_{L^1(\delta)} \leq c\|F\|_{L^{2,1}(\delta^2)}$  を示せばよい。ここで  $d_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  が存在して、 $\delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = \prod_{i=1}^n e^{d_i \alpha_i(H)}$  と書けることに注意する。また  $F$  は  $\mathbf{R}_{++}^n$  内の直方体  $S$  上の特性関数  $\chi_S$  として一般性を失わない。 $S$  を  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$  とすれば  $\{x \mid |\chi_S(x)| > \lambda\}$  の  $\delta^2$  に関する体積は  $0 \leq \lambda \leq 1$  のとき  $V(S) = \int_S \delta^2(x) dx$  であり、その他では0である。よって再配置関数  $\chi_S^*(t)$  は  $0 \leq t \leq V(S)$  のとき1であり、その他では0である。よって

$$\|\chi_S\|_{L^{2,1}(\delta^2)} = c \int_0^\infty |\chi_S^*(t)| t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = cV(S)^{\frac{1}{2}}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned} \|\chi_S\|_{L^1(\delta)} &= \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{d_i \alpha_i(H)} dH \leq c \prod_{i=1}^n (e^{2d_i b_i} - e^{2d_i a_i})^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{2d_i \alpha_i(H)} dH \right)^{\frac{1}{2}} = cV(S)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。よって求める結果を得る。  $\square$

主定理は以下である。

**Theorem 3.4.** *Let  $G$  be a connected complex semisimple Lie groups. Let  $M_m$  be a Fourier multiplier of type  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ . Then (2) holds for all  $f, g \in L^{2,1}(\Delta)$ .*

*Proof.* [7] で (1) を示したときと同様に、(2) を示すにはローレンツ空間の双対性を用いて、 $h \in L^{2,1}(\Delta)$  に対して

$$\left| \int f * M_m g(\exp H) h(\exp H) \Delta(\exp H) dH \right| \leq c \|f\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|g\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|h\|_{L^{2,1}(\Delta)} \quad (10)$$

を示せばよい。ここで  $R$  を  $\mathfrak{a}$  のコンパクト集合で原点を含まないものとする。今、 $f, g, h$  のいずれかが  $\exp R$  に台を持つとする。 $f$  とすれば

$$\begin{aligned} |M_m(f * g * h)(e)| &\leq \|f * g\|_{L^2(\Delta)} \|M_m h\|_{L^2(\Delta)} \leq \|f\|_{L^1(\Delta)} \|g\|_{L^2(\Delta)} \|h\|_{L^2(\Delta)} \\ &\leq \left( \int_R \Delta(\exp H) dH \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Delta)} \|g\|_{L^2(\Delta)} \|h\|_{L^2(\Delta)} \end{aligned}$$

である。 $L^{2,1}(\Delta) \subset L^2(\Delta)$  より求める評価が得られる。 $\exp R$  に台を持つ関数を  $g, h$  としても同様である。よって、 $f, g, h$  は  $\exp R$  の外  $(\exp R)^c$  に台を持つと仮定してよい。このとき (7), (8), Lemma 3.2 より

$$\begin{aligned} &\left| \int f * M_m g(\exp H) h(\exp H) \Delta(\exp H) dH \right| \\ &\leq c \|\pi(-\partial_H) \mathcal{A}f \otimes M_m \mathcal{A}g(\exp H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ &\leq c \|\pi(-\partial_H) \mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})} \|M_m \mathcal{A}g \circ \exp\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ &\leq c \|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \|g\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}. \end{aligned}$$

ところで関数  $a$  が  $(\exp R)^c$  に台を持つとき補題 3.3 より

$$\|a\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \leq c \|a\|_{L^1(E)} \leq c \|a\|_{L^{2,1}(E^2)} \leq c \|a\|_{L^{2,1}(\Delta)}$$

である。よって (10) が得られた。  $\square$

ここで  $M_m$  が  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$  型となる十分条件を求める。球関数  $\phi_\lambda(\exp H)$  が  $\lambda$  の関数として、 $\mathfrak{a}$  上のコンパクトな台を持つ  $L^1$  関数  $A_H(S) = A(S, H)$  のフーリエ変換として得られること、すなわち

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} A(S, H) e^{i\lambda(S)} dS$$

となることに注意する ([1])。よって (4) より  $f \in L^1(\Delta)$  に対して

$$\mathcal{A}f(\exp S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) A(S, H) dH$$

である。 $A(S, H)$  の第 1 変数に  $M_m$  を作用させたものを  $M_{m,1}A(S, H)$  と書く。もし  $M_{m,1}A(S, H)$  が  $S$  の関数として  $L^1(\mathfrak{a})$  に属するならば

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} M_{m,1}A(S, H) e^{i\lambda(S)} dS$$

となり

$$M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)(S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) M_{m,1}A(S, H) dH$$

である。よってある定数  $c > 0$  が存在して、すべての  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$  となるならば (8) が得られる。以上のことから次の系が得られた。

**Corollary 3.5.** *Let us suppose that*

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} B(S, H) e^{i\lambda(S)} dS, \quad (11)$$

where  $B(S, H) \in L^1(\mathfrak{a})$  as a function of  $S$  and  $B \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$ . Then  $M_m$  is of type  $(\sqrt{\Delta}, \infty)$  and thus, (2) holds for  $f, g \in L^{2,1}(\Delta)$ .

## 4 例

系 3.5 の条件  $B_H(S) \in L^1(\mathfrak{a})$ ,  $B(S, H) \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$ 、すなわち、ある定数  $c > 0$  が存在して、すべての  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$  となる  $m$  を求める。

(I) 実ランク 1 の場合:  $\dim A = 1$  のとき

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = c \frac{\sin \lambda(H)}{\lambda} = c \int_{-H}^H e^{i\lambda(S)} dS$$

である。よって  $m(\lambda) = 1$  とすれば  $B(S, H)$  は  $[-H, H]$  の特性関数である。したがって修正の必要は無く Kunze-Stein 現象 (1) が成立する。

(II)  $Sp(4, \mathbb{C})$  の場合:  $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \text{diag}(a_1, a_2, -a_1, -a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$  である。 $e_i \in \mathfrak{a}^*$ ,  $i = 1, 2$  を  $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$  で定義すれば  $\Sigma_+ =$

$\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$  である。  $\alpha = e_1 - e_2$  および  $\beta = 2e_2$  とする。 $s_\gamma$  を  $\gamma \in \Sigma_+$  に関する  $\mathfrak{a}^*$  の鏡映とする。このときワイル群  $W$  は  $W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha, s_\beta s_\alpha s_\beta, (s_\alpha s_\beta)^2\}$  となる。 $\mathfrak{a}^*$  の要素  $\lambda$  を  $\lambda = \lambda_1(2\alpha + \beta) + \lambda_2\beta = 2\lambda_1e_1 + 2\lambda_2e_2$  と表示する。 $w \in W$  の  $\lambda$  への作用を計算して (3) を用いると

$$D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = \frac{1}{16} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \times \left( -\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \lambda_2$$

とすれば  $m$  は  $W$  不変であり

$$m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = c \frac{\sin^2 \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2} \\ \times \left( -\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

となる。ところで

$$\frac{\sin^2 \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2}$$

は  $u(x, y) = -\frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$  と  $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  の特性関数の積のフーリエ変換であり

$$\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

は  $v(x, y) = \frac{1}{2}$  と  $\{(x, y) \mid |x + y| \leq |a_1 + a_2|, |x - y| \leq |a_1 - a_2|\}$  の特性関数の積のフーリエ変換である。よって  $B(S, H)$  は

$$u \otimes v(S) + u \otimes s_\beta v(S)$$

の定数倍である。以上のことから  $B(S, H)$  は系 3.5 の条件を満たす。



(III)  $SL(3, \mathbf{C})$  の場合:  $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \text{diag}(a_1, a_2, -(a_1 + a_2)) \mid a_1, a_2 \in \mathbf{C}\}$  である。  $e_i \in \mathfrak{a}^*$ ,  $i = 1, 2$  を  $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$ ,  $e_3(H(a_1, a_2)) = -(a_1 + a_2)$  と定義すれば  $\Sigma_+ = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$  である。  $\alpha = e_1 - e_2$ ,  $\beta = e_2 - e_3$  とする。  $W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha\}$  である。  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  を  $\lambda = \lambda_1 \frac{4}{3}(2\alpha + \beta) + \lambda_2 \frac{4}{3}(-\alpha + \beta) = 4\lambda_1 e_1 + 4\lambda_2 e_2$  と表示する。  $W$  の  $\mathfrak{a}^*$  への作用を計算して (3) を用いると、  $D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$  は

$$\begin{aligned} & 4(2i \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{2i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin \lambda_1(a_1 - a_2) \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \\ & - e^{-i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin 2\lambda_1(a_1 - a_2) \sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2) \\ & + 2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{-i(\lambda_1 - 2\lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin 3\lambda_1(a_1 + a_2) \\ & \quad \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \lambda_2 \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2)$$

とすれば、  $m$  は  $W$  不変であり、  $m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$  は

$$\begin{aligned} & \frac{i}{16} \sin^2 \lambda_1 \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2} \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2) \\ & \times \left( 2i \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{2i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin \lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \right. \\ & - e^{-i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin 2\lambda_1(a_1 - a_2)}{\lambda_1} \frac{\sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ & + 2 \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-i(\lambda_1 - 2\lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin 3\lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \\ & \quad \left. \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2) \right) \end{aligned}$$

となる。ここで  $\frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2}$  は  $-i \text{sgn } y$  と  $\{y \mid |y| \leq \frac{1}{2}\}$  の特性関数の積の 1 次元フーリエ変換の  $4\lambda_2$  での値であり

$$\frac{\sin c(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 \mp a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin d\lambda_1(a_1 \pm a_2)}{\lambda_1}$$

は  $\{(x, y) \mid |y| \leq |\frac{c}{4}(a_1 \mp a_2)|, |x + y| \leq |\frac{d}{4}(a_1 \pm a_2)|\}$  の特性関数のフーリエ変換の 4 倍である。他の項はフーリエ multipliers としては、これらの特性関数の平行移動である。よって  $B(S, H)$  は系 3.5 の条件を満たす。

## References

- [1] M. Flensted-Jensen and D. L. Ragozin, *Spherical functions are Fourier transforms of  $L^1$ -functions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6 (1973), pp.457-458.
- [2] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group, I*, Amer. J. Math. 80 (1958), pp. 241-310.
- [3] R. A. Hunt, *On  $L(p, q)$  Spaces*, L' Enseignement Math. 12 (1966), pp.249-276.
- [4] A. D. Ionescu, *An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and the related maximal operators*, Ann. of Math. 152 (2000), pp.259-275.
- [5] T. Kawazoe, *Applications of an inverse Abel transform for Jacobi analysis: weak- $L^1$  estimates and the Kunze-Stein phenomenon*, to appear in Tokyo J. Math.
- [6] T. Kawazoe and J. Liu, *A modified endpoint estimates of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups*, Scientiae Mathematicae Japonicae, online, 2018-3, pp. 1-10.
- [7] J. Liu, *The Kunze-Stein phenomenon associated with Jacobi transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), pp.1817-1821.
- [8] C. Meaney, *Spherical functions and spectral synthesis*, Compositio Mathematica 54 (1985), pp.311-329.
- [9] F. Rouvière, *Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un* Ann. Scuola. Norm. Sup. 10 (1983), pp.263-290.